Основные и сопряженные операторы в линейных задачах. Элементы теории

Лектор: д.ф.м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

1.1 Основные и сопряженные операторы в линейных задачах. Элементы теории

Рассмотрим пример простейшего дифференциального оератора второго порядка

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \tag{1.1}$$

действующего на вещественные функции v , которые обладают следующими свойствами:

а) $v(x)$ определены в области $\Omega = (0,1)$, они непрерывны и дважды дифференцируемы во всех внутренних точках этой области;

б) $v(x)$ квадратично суммируемы на Ω вместе со своими производными dv/dx и d^2v/dx^2, то есть

$$\int_0^1 \left\{ \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + v^2(x) \right\} dx < \infty. \tag{1.2}$$

Известно, что вещественные функции $v(x)$, обладающие свойством $\int_0^1 v^2(x)dx < \infty$, образуют гильбертово пространство функций $H = L_2(\Omega)$. Далее предположим, что функции $v(x)$ принимают заданные значения на границе области Ω при $x = 0$ и $x = 1$, например

$$v(0) = v(1) = 0. \qquad (1.3)$$

Обозначим множество функций $v(x)$, удовлетворяющих условиям а),б) и (1.3), через $D(A)$. Будем называть это множество областью определения оператора A.

Для функции $v(x)$ и $\omega(x)$ в гильбертовом пространстве H с областью определения $\Omega = (0,1)$ введем в рассмотрение скалярное произведение

$$(v,\omega) = \int_0^1 v\omega dx. \quad (1.4)$$

Подействуем теперь оператором A на функцию $v(x) \in D(A)$. В результате будем иметь новую функцию Av, также определенную в $\Omega = (0,1)$ и принадлежащую H. Рассмотрим скалярное произведение функции Av и ω:

$$(Av,\omega) = -\int_0^1 \omega \frac{d^2v}{dx^2} dx \quad (1.5)$$

и проинтегрируем полученное выражение (1.5) по частям, тогда

$$(Av,\omega) = -\omega\frac{dv}{dx}\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{d\omega}{dx}\frac{dv}{dx}dx. \qquad (1.6)$$

Внеинтегральный член в правой части (1.6) обращается в нуль в силу того, что $v \in D(A)$, а каждая функция этого множества по предположению (1.3) равна нулю на границах интервалов. В результате соотношение (1.6) перейдет в следующее:

$$(Av,\omega) = \int_0^1 \frac{d\omega}{dx}\frac{dv}{dx}dx. \qquad (1.7)$$

Интеграл в (1.7) еще раз возьмем по частям. Получим

$$(Av,\omega) = \frac{d\omega}{dx}v\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 v\frac{d^2\omega}{dx^2}dx. \qquad (1.8)$$

Внеинтегральный член в этом соотношении в силу условия (1.3) также обратиться в нуль. И в результате мы будем иметь:

$$(Av, \omega) = -\int_0^1 v \frac{d^2\omega}{dx^2} dx. \quad (1.9)$$

Сравнивая соотношения (1.5) и (1.9), мы приходим к выводу, что

$$(Av, \omega) = (v, A\omega). \quad (1.10)$$

Выражение (1.10) является тождеством Лагранжа для симметричных операторов. Иначе говорят, если для функций $v, \omega \in D(A)$ имеет место равенство (1.10), то оператор A является симметричным. Оператор A можно назвать также формально самосопряженным.

Напомним далее некоторые положения из теории спектральных задач для самосопряженных операторов. Пусть мы имеем спектральную задачу

$$Av = \lambda v, \qquad (1.11)$$

где оператор A по-прежнему определен в виде (1.1), а функция $v \in D(A)$ и, следовательно, удовлетворяет однородным граничным условиям (1.3). В случае рассматриваемой простейшей задачи операторная запись (1.11) может быть заменена дифференциальной:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda v = 0, v(0) = v(1) = 0. \quad (1.12)$$

Требуется найти все ненулевые решения задачи (1.12). Известно, что такими решениями являются функции

$$v_k(x) = sink\pi x, \;\; k = 1,2,\ldots, \qquad (1.13)$$

при этом

$$\lambda_k = k^2\pi^2.$$

Нетрудно показать, что система собственных функций (1.13) ортогональна, то есть

$$\int_0^1 v_k(x)v_n(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{если } k = n, \\ 0, \text{если } k \neq n. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Известно, что функции (1.13) образуют полную систему, которая позволяет представить в виде ряда любую функцию из $H = L_2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$Av = f, \qquad (1.15)$$

где A по-прежнему определен в виде (1.1), а f – функция источника, принадлежащая гильбертову пространству H, с областью определения $\Omega = (0,1)$. В дифференциальной форме мы будем иметь задачу

$$-\frac{d^2v}{dx^2} = f, v(0) = v(1) = 0. \qquad (1.16)$$

Уравнение из (1.16) умножим на функцию $v_k(x)$ из (1.13) и результаты проинтегрируем по всей области определения решения Ω. Получим

$$-\int_0^1 v_k \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int_0^1 f v_k dx. \qquad (1.17)$$

Введем обозначение

$$\int_0^1 f v_k dx = f_k$$

и функцию $v(x)$ представим в виде ряда Фурье

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n. \qquad (1.18)$$

Подставим (1.18) в соотношение (1.17) и воспользуемся тем, что любая функция $v_k(x)$ удовлетворяет задаче

$$Av_n = \lambda_n v_n. \ (1.19)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \int_0^1 v_n(x) v_k(x) dx = f_k.$$

Используя условие ортогональности (1.14), получаем выражение для коэффициентов Фурье

$$\frac{\lambda_k \alpha_k}{2} = f_k,$$

или

$$\alpha_k = \frac{2f_k}{\lambda_k}.$$

Таким образом, решение задачи (1.16) будем иметь вид

$$v = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n(x)}{\lambda_k}. \quad (1.20)$$

Приведем конкретный пример. Пусть $f(x) = sin\pi x$. В этом случае задача (1.15) имеет вид

$$-\frac{d^2 v}{dx^2} = sin\pi x, x \in (0,1), v(0) = v(1) = 0.$$

Используя функции $v_k(x)$ из (1.13), вычисляем f_k:

$$f_k = \int_0^1 f v_k dx = \int_0^1 sin\pi x sin\pi kx dx = \frac{1}{2}\delta_{1k},$$

где

$$\delta_{1k} = \begin{cases} 0, k \neq 1, \\ 1, k = 1. \end{cases}$$

Теперь, зная f_k и $\lambda_л = k^2\pi^2$, по формуле (1.20) определяем решение v. Оно имеет вид

$$v = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n(x)}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{1n} v_n(x)}{n^2\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} v_1(x) = \frac{1}{\pi^2} sin\pi x,$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Переходим теперь к рассмотрению частного примера несамосопряженного оператора. Предположим, что

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}.$$

Так же как и раньше, предположим, что A действует на функции v , принадлежащие множеству $D(A)$, определенному выше свойствами а) и б) и условием (1.3).

Составим скалярное произведение функции Av , где $v \in D(A)$, и $\omega \in D(A^*)$ с областью определения $\Omega = (0,1)$. Заметим, что множество $D(A^*)$, которому принадлежат элементы ω, пока не определено. Свойства этого множества будут уточнены в процессе дальнейших преобразований, которые должны привести нас к тождеству Лагранжа.

Итак, рассмотрим соотношение

$$(Av, \omega) = -\int_0^1 \omega \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^1 \omega \frac{dv}{dx} dx. \quad (1.21)$$

Выполним двукратное интегрирование по частям первого из выражений в правой части (1.21) и однократное интегрирование по частям второго с учетом условий (1.3):

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (1.22)$$

Потребуем далее, чтобы для $\omega(x)$также выполнялись аналогичные условия

$$\omega(0) = \omega(1) = 0. \quad (1.23)$$

Тогда внеинтегральные члены обратятся в нуль и мы получим выражение (1.21) в виде

$$(Av,\omega) = -\int_0^1 v\,\frac{d^2\omega}{dx^2}\,dx - \int_0^1 v\,\frac{d\omega}{dx}\,dx. \qquad (1.24)$$

Итак, в процессе получения соотношения (1.24) мы выполнили ряд преобразований, которые требуется не только квадратичной суммируемости на $\Omega = (0,1)$ функции $\omega(x)$, но и ее производных $\frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2}$, то есть

$$\int_0^1 \left\{ \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \omega^2(x) \right\} dx < \infty.$$

Если к этим свойствам еще добавить условие на границе (1.23) для функции $\omega(x)$, то есть

$\omega(0) = \omega(1) = 0$, то мы приходим к множеству $D(A^*)$.

Если далее ввести обозначение

$$A^* = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx},$$

то соотношение (1.24) окончательно запишем в виде

$$(Av, \omega) = (v, A^*\omega), v \in D(A), \omega \in D(A^*). \quad (1.25)$$

Соотношение (1.25) является тождеством Лагранжа. В этом случае мы уже имеем два оператора основной A и сопряженный к нему A^*.

Уравнение вида

$$Av = f$$

с оператором A и некоторый правой частью $f \in H$ будем называть ***основным уравнением***, а неоднородное уравнение с оператором A^* вида

$$A^*\omega = p$$

Будем называть ***сопряженным уравнением***. Здесь p – пока произвольная функция, вид которой и ее свойства будут определяться в зависимости от решаемой задачи.

Уравнения $Av = f$ и $A^{*}\omega = p$ в дифференциальной форме имеют вид

$$-\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = f(x), x \in (0,1),$$

$$v(0) = v(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} = p(x), x \in (0,1),$$

$$\omega(0) = \omega(1) = 0$$

и называются основной и сопряженной задачами соответственно.

Приведем численный пример. Рассмотрим $f(x) = x(1-x), p(x) = 1$. Тогда задачи $Av = f$ и $A^*\omega = p$ принимают вид

$$-\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = x(1-x), x \in (0,1),$$

$$v(0) = v(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} = 1, x \in (0,1),$$

$$\omega(0) = \omega(1) = 0.$$

Для численного решения этих задач был применен метод конечных разностей на равномерной сетке $x_i = ih$, где $i = 0, \dots, N, h = 1/N$, и построены схемы второго порядка аппроксимации по h. Полученные при этом трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений были решены методом факторизации, или прогонки. Графики решений основной и сопряженной задач приведены на рис.1.

В случае несамосопряженного оператора видоизменяется и формулировка спектральной задачи. В самом деле, для вещественных v и ω рассматриваются теперь две задачи:

основная

$$Av = \lambda v \qquad (1.26)$$

и сопряженная

$$A^{*}\omega = \lambda\omega. \qquad (1.27)$$

В дифференциальном представлении имеем основную задачу

$$-\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = \lambda v, v(0) = v(1) = 0 \qquad (1.28)$$

и сопряженную к ней

$$-\frac{d^2 \omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} = \lambda\omega, \omega(0) = \omega(1) = 0 \qquad (1.29)$$

Нетрудно найти все решения задач (1.28), (1.29):

$$v_k(x) = e^{x/2} sin k\pi x, k = 1,2, \dots, \quad (1.30)$$

$$\omega_n(x) = e^{-x/2} sin n\pi x, n = 1,2, \dots, \quad (1.31)$$

они отвечают собственным значениям $\lambda_k = \frac{1}{4} + \pi^2 k^2$. Очевидно, что $v_k(x)$ не ортогональны друг другу, так же как не ортогональны друг другу $\omega_n(x)$. Однако имеет место биортогональность функций $v_k(x)$ и $\omega_n(x)$, т.е.

$$(v_k, \omega_n) = 0 \text{ при } k \neq n. \quad (1.32)$$

и отличным от нуля это скалярное произведение будет только при $k = n$. Для простейшего нашего случая оно равно

$(v_n, \omega_n) = 1/2$. (1.33)

Итак, мы пришли к условию биортогональности.

Биортогональность и полнота функций $\{v_k\}$ и $\{\omega_n\}$ потребуются нам при разложении функций из H в ряды Фурье.

Обратим внимание на метод определения множества $D(A^*)$ по заданному основному оператору A. Указанные свойства $D(A^*)$ мы будем определять всякий раз, имея в виду конкретную постановку задачи в дифференциальной или интегро-дифференциальной постановке.

Метод проиллюстрируем на простейшем примере оператора

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \quad (1.34)$$

На этот раз предположим, что оператор A действует на функции $v \in D(A) \subset H$, которые удовлетворяют только свойствам а) и б). Что касается граничных условий, то мы их выбираем в виде

$$\frac{dv}{dx} + \beta v = 0 \text{ при } x = 0, \quad (1.35)$$

$$v = 0 \text{ при } x = 1.$$

где β – некоторая заданная константа. Пусть функции $\omega \in D(A^*)$ (свойства которых нам пока неизвестны). Мы их будем определять последовательно, предположив, что все дальнейшие преобразования с функциями ω обоснованы. А в заключение сформулируем апостериори те свойства, которые обеспечивают такое предложение.

Итак, рассмотрим, как и прежде, выражение (1.21):

$(Av,\omega) = -\int_0^1 \omega \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^1 \omega \frac{dv}{dx} dx$. (1.36)

Выражение справа в (1.36) проинтегрируем по частям: первый член – дважды, а второй - один раз. Тогда

$(Av,\omega) = -\omega(1)\frac{dv}{dx}|_{x=1} + \omega(0)\frac{dv}{dx}|_{x=0} + \frac{d\omega}{dx}|_{x=1} v(1) - \frac{d\omega}{dx}|_{x=0} v(0) + \omega(1)v(1) - \omega(0)v(0) + (v, A^*\omega)$, (1.37)

где

$A^* = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}$.

Для того чтобы имело место строгое тождество Лагранжа (1.24): $(Av,\omega) = (\omega, A^*\omega)$, необходимо, чтобы внеинтегральные члены в (1.37) обратились в нуль, т.е. чтобы выполнялось соотношение

$-\omega(1)\frac{dv}{dx}|_{x=1} + \omega(0)\frac{dv}{dx}|_{x=0} + \frac{d\omega}{dx}|_{x=1} v(1) - \frac{d\omega}{dx}|_{x=0} v(0) + \omega(1)v(1) - \omega(0)v(0) = 0$. (1.38)

Выражение (1.38) несколько упростим, использовав условия (1.35) на функции $v \in D(A)$, т.е.

$\frac{dv}{dx}|_{x=0} + \beta v(0) = 0, v(1) = 0.$ (1.39)

Исключим $\frac{dv}{dx}(0)$ в (1.38), приняв $\frac{dv}{dx}(0) = -\beta v(0)$. И, положив $v(1) = 0$, соотношение (1.38) запишем в виде

$-\omega(1)\frac{dv}{dx}|_{x=1} - \beta\omega(0)v(0) - \frac{d\omega}{dx}|_{x=0}v(0) - \omega(0)v(0) = 0.$ (1.40)

Приведя подобные члены при $\frac{dv}{dx}|_{x=1}$ и $v(0)$, получим

$-\omega(1)\frac{dv}{dx}|_{x=1} - \left[(\beta+1)\omega(0) + \frac{d\omega}{dx}|_{x=0}\right]v(0) = 0.$ (1.41)

Равенство (1.41) должно выполняться при произвольных $\frac{dv}{dx}(1)$ и $v(0)$. В этом случае необходимо положить

$\omega(1) = 0, (\beta + 1)\omega(0) + \frac{d\omega}{dx}|_{x=0} = 0.$

В результате приходим к граничным условиям для всех функций $\omega \in D(A^*)$:

$$\frac{d\omega}{dx} + (\beta + 1)\omega = 0 \text{ при } x = 0,$$

$\omega = 0$ при $x = 1$. (1.42)

Теперь подведем итог и сформулируем все требования к функциям $\omega \in D(A^*)$. При получении тождества Лагранжа мы выполнили ряд преобразований, которые требуют квадратичной суммируемости на $\Omega = (0,1)$ функции $\omega(x)$ вместе с ее производными $\frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2}$. Кроме того, каждая функция $\omega \in D(A^*)$ должна удовлетворять граничным условиям (1.42). при выполнении этих условий имеет место тождество Лагранжа и оператор A^* на $\omega \in D(A^*)$ является сопряженным к A.

В этом случае неоднородное уравнение

$Av = f$ (1.43)

с оператором A из (1.34) представляет собой краевую задачу вида

$$-\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = f(x), \qquad x \in (0,1),$$

$\frac{dv}{dx} + \beta v = 0$ при $x = 0$, (1.44)

$$v = 0 \text{ при } x = 1,$$

А сопряженное уравнение

$A^*\omega = p$ (1.45)

с некоторой правой частью $p(x)$ имеет соответственно вид

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx} = p(x), x \in (0,1),$$

$\frac{d\omega}{dx} + (\beta + 1)\omega = 0$ при $x = 0,$ (1.46)

$\omega = 0$ при $x = 1.$

Для иллюстрации приведем численный пример. Рассмотрим

$$\beta = -5, f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0; 0.3], \\ 0, x \notin [0; 0.3]; \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, x \in [0.8; 1], \\ 0, x \notin [0.8; 1]. \end{cases}$$

Тогда задачи (1.44) и (1.46) принимают вид

$$-\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}=f(x), x \ \in (0,1),$$

$$\frac{dv}{dx}-5v=0 \text{ при } x=0, \quad (1.47)$$

$$v=0 \text{ при } x=1;$$

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2}-\frac{d\omega}{dx}=p(x), x \ \in (0,1),$$

$$\frac{d\omega}{dx}-4\omega=0 \text{ при } x=0, \quad (1.48)$$

$$\omega=0 \text{ при } x=1.$$

Для численного решения этих задач были использованы простейшие конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации на равномерной сетке $x_i = ih$, где $i = 0, \dots, N; h = 1/N$. Полученные при этом трехдиагональные системы линейных уравнений были решены методом факторизации. Графики решений основной и сопряженной задачи (1.47) и (1.48) приведены на рис.2.

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.